

Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto “paradosso di Duval”

Bruno D'Amore¹ - Martha Isabel Fandiño Pinilla¹ – Maura Iori² -
Maurizio Matteuzzi³

¹ NRD Bologna (Dipartimento di Matematica, Università di Bologna) e Mescud (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia)

² NRD Bologna e Dottorato Università di Palermo

³ Dipartimento di Filosofia e Comunicazione, Università di Bologna

Sunto. Nel 1993 un famoso articolo di Raymond Duval metteva in evidenza un dato di fatto: lo studente confonde l'oggetto matematico O , che sta cognitivamente cercando di costruire, con una sua rappresentazione semiotica $R(O)$; e spiegava che questa confusione era dovuta ad una sorta di paradosso inevitabile: solo chi ha già costruito O , può riconoscere $R(O)$ come rappresentazione di O e non come oggetto in sé. Questa riflessione ha molto influenzato i ricercatori negli anni successivi. Ma sono vari gli studiosi di semiotica che, se non proprio con quelle parole, hanno evidenziato il fenomeno; in questo scritto ci proponiamo di ricordarne alcuni.

Abstract. In 1993 a famous article by Raymond Duval highlighted a simple fact: students confuse the mathematical object O , that they are trying to build cognitively, with one of its semiotic representations $R(O)$; he explained that this confusion was due to a sort of inevitable paradox: only someone who has already built O , can recognize $R(O)$ as a representation of O and not as an object in itself. This idea has been extremely influential for researchers in the following years. However, many scholars of semiotics have emphasized the same phenomenon, even if in not quite the same words; in this paper we are going to mention some of them.

1. Premessa

Gli studi di Raymond Duval hanno indubbiamente aperto un nuovo fronte teorico ma anche concreto nelle ricerche internazionali in didattica della matematica; riconoscere che uno dei maggiori ostacoli all'apprendimento della matematica sia legato alle specifiche caratteristiche dell'unico strumento possibile della sua denotazione, la semiotica, ha aperto breccie fino ad allora inesplorate. Ma, dagli anni '90 in poi, moltissimi sono gli studiosi di tutto il mondo che, sempre più approfonditamente, affrontano il tema. Crediamo di poter affermare che sia attualmente uno dei più diffusi al mondo, nel campo della ricerca.

Proprio perché oramai lo si può considerare un tema classico, ci sentiamo autorizzati ad aprire un altro percorso su questa stessa tematica, quello storico – epistemologico – filosofico – critico, per trovare una discendenza consolidata e illustre alle riflessioni del caro amico Raymond. Come sempre accade, lo “strumento”, consolidato, si fa “oggetto” di conoscenza ed inizia dunque una sua storicizzazione che lo teorizza all'interno di un sistema al quale fanno capo diversi pensatori, spesso non specifici dell'ambito, nel nostro caso non necessariamente didatti, ma soprattutto filosofi.

È la sorte che tocca a tutti gli strumenti, una volta divenuti oggetti della matematica (Sfard, 1991).

Ci ripromettiamo dunque di ricordare brevemente qual è la tematica introdotta da Duval sotto forma di paradosso cognitivo e di rintracciare, mostrare e commentare, assai brevemente, brani di opere di Autori precedenti che hanno affermato sostanzialmente la stessa frase di Duval, in ambiti diversi, ma filosoficamente rilevanti.

2. Raymond Duval

Ecco come Raymond Duval enunciava 20 anni fa il suo famoso *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, che ha forti ripercussioni cognitive (Duval, 1993, p. 38; la traduzione è nostra, concordata con l'Autore): «(...) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considerano le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche».

Se si chiede ad un bambino piccolo che cos'è "il numero tre", egli mostra tre dita alzate della mano destra; la domanda riguarda l'oggetto matematico "tre" ma ha come risposta una rappresentazione semiotica di quell'oggetto.

Se si pone ad un bambino di fine scuola primaria la stessa domanda, questi scriverà con la penna su un pezzo di carta la cifra 3; è cambiata la rappresentazione, ma il problema della differenza fra oggetto e sua rappresentazione permane.

Ovvio, la domanda è sovrastimata: una domanda così epistemologicamente significativa non può avere risposta da giovanissimi; ma le cose non cambiano con il passare del tempo.

Se si chiede ad un quindicenne che cosa sia una retta, possiamo

avere in risposta un disegno di una macchia di grafite dritta, lunga e sottile; oppure un'equazione lineare del tipo $ax+by+c=0$ scritta a penna su un foglio di carta; entrambe le risposte sono rappresentazioni semiotiche dell'oggetto richiesto, non l'oggetto richiesto.

Se si chiede ad uno studente liceale nel periodo degli esami di maturità che cosa sia una derivata, scriverà $f'(x)$, offrendoci una rappresentazione semiotica, laddove la domanda riguardava un oggetto.

E questa storia prosegue all'università, senza troppe modifiche.

Solo un esperto tenterà di rispondere in maniera epistemologicamente significativa alla domanda sull'oggetto, mostrando semmai poi una o varie rappresentazioni semiotiche di esso ...

Raymond Duval aveva ragione con la sua frase perentoria: *non c'è noetica senza semiotica* (sempre Duval, 1993); noi oggi sappiamo che dobbiamo passare attraverso varie rappresentazioni semiotiche per raggiungere la graduale e consapevole costruzione cognitiva dell'oggetto, fino a quando l'apprendente non si sarà reso conto che, a fronte di un oggetto O , ci sono varie rappresentazioni semiotiche $R_i(O)$ di O ($i = 1, 2, \dots$). Il giorno in cui le dominerà, le saprà usare nei contesti opportuni e le saprà trasformare l'una nell'altra, allora potremo dire che lo studente ha costruito cognitivamente O (questa è la proposta filosofico - didattica di D'Amore, 2003).

Ma, come abbiamo già detto, la posizione di Duval ha espressioni analoghe illustri che ci fa piacere mostrare ed esplorare per evidenziare il fatto che la sua posizione non è un *unicum* nella storia per così dire semiotica nell'apprendimento. In altre parole, una posizione assai vicina a quella di Duval si ritrova in vari pensatori, non necessariamente studiosi di didattica.

3. Il problema semantico e i suoi risvolti pedagogici e didattici

La relazione tra conoscenza, linguaggio, mondo rimanda al millenario problema semantico, ovvero che cosa sia il *significato*. Problema che si innerva direttamente nella teoria della conoscenza, o gnoseologia, e in quella dell'essere, o ontologia. Di fatto, siamo nel fulcro di ogni teoresi filosofica. Si dovrebbe qui, di conseguenza, descrivere tutto lo sviluppo del pensiero umano. Con questa *captatio benevolentiae* iniziale vogliamo tentare di scongiurare la facile accusa di incompletezza di quanto segue, incompletezza (e anzi somma povertà) che ci piace assumere esplicitamente *ab initio*.

3.1. Platone

Nella nostra sintesi estrema non possiamo prescindere da Platone (ˆ427 – ˆ347), punto di riferimento di ogni filosofia successiva. La teoria platonica della conoscenza e, di conseguenza, della pedagogia, si basa sulla sua assunzione che l'anima umana abbia avuto una vita precedente, nel mondo delle idee, o *iperuranio* (letteralmente: al di sopra del cielo). Questa è in somma sintesi la celebre teoria dell'*anamnesi*: la conoscenza è ricordo, recupero di quanto già un tempo era noto. La conseguenza sul piano pedagogico è evidente: nulla passa dal maestro al discente, ma avviene piuttosto che il maestro susciti il processo di reminiscenza nell'allievo, aiutandolo a 'ricordare'. Va da sé, quindi, che chi impara deve compiere un processo tutto interiore, ritrovando in sé stesso la verità.

Ripensiamo allora in questi termini il paradosso di cui ci stiamo occupando: come può il discente cercare in sé stesso ciò che non conosce, se non conosce che cosa cercare? Quanto il maestro può porgere non è evidentemente l'oggetto matematico, ma una espressione (per esempio linguistica) che ambisce a denotarlo (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2012). Ecco allora che l'allievo riceve un *denotans* momentaneamente privo del suo *denotatum*, in quanto egli non ha accesso all'oggetto matematico coinvolto. E tuttavia

questa sollecitazione può fare sì che l'allievo 'scavi' in sé stesso alla ricerca di un'immagine (un ricordo) dell'ente adeguato, ente che, secondo Platone, egli ha già certamente incontrato nel mondo ideale. Da qui derivano tutte le teorie pedagogiche che assumono il discente come parte attiva, come soggetto e non come oggetto amorfo del processo di apprendimento (lastra di marmo non scalfita, vaso da riempire, le metafore pedagogiche sono tante). E questo vale anche per molti altri Autori che, a differenza di Platone, non assumono l'ipotesi ontologicamente drastica dell'esistenza di un opportuno sopramondo: per tanti Autori, anche della modernità, il processo di apprendimento avviene interiormente al discente, e non è elargita dal maestro. All'opposto troviamo, notiamo *en passant*, la teoria del *travaso*, che trova la sua massima espressione nella pedagogia dei Gesuiti.

Dunque troviamo qui un modello del paradosso iniziale: ciò che trasmigra dal maestro all'allievo è un segno linguistico considerato in sé, senza alcuna relazione con un oggetto, una pura possibilità di funzionare come segno ovvero come rappresentazione semiotica di un oggetto matematico, per dirla nei termini attuali, e qui si innesca il procedimento maieutico socratico, il 'tirar fuori' (in senso etimologico esatto) dalla reminiscenza della vita precedente l'oggetto matematico, un suo ricordo, come nel mirabile e celeberrimo passo del *Menone*, stracitato, in cui Socrate induce lo schiavo, che pure ignora i fondamenti della geometria, a ri-scoprire una verità geometrica.

Il nostro paradosso si risolve dunque, per Platone, assumendo che l'anima, umana e immortale, del discente, abbia "visto" l'oggetto matematico nella sua vita precedente, prima della nascita, l'abbia dimenticato al momento della nascita, e possa ricordarlo in situazioni adeguate.

3.2. Aristotele

Negli scritti di logica di Aristotele (~384 – ~322) troviamo il primo trattato dedicato al linguaggio, *Dell'espressione* (*De interpretatione*, in latino; *Perì hermeneias*, in greco).

Fin dalle prime parole, Aristotele ci fornisce una sua teoria del significato: «Or dunque, i suoni della voce sono simboli delle affezioni che hanno luogo nell'anima, e le lettere scritte sono simboli dei suoni della voce. Allo stesso modo poi che le lettere non sono le medesime per tutti, così neppure i suoni sono i medesimi; tuttavia, suoni e lettere risultano segni, anzitutto, delle affezioni dell'anima, che sono le medesime per tutti e costituiscono le immagini di oggetti, già identici per tutti» [*Dell'espressione*, 16a 3-7; citiamo la traduzione di Giorgio Colli (1917 – 1979), Bari: Laterza, 1973].

Dunque, le lettere scritte sono simboli dei suoni della voce; i suoni della voce sono simboli delle affezioni dell'anima e le affezioni dell'anima sono sembianze o immagini delle cose (*pragmata*); mentre le cose e le affezioni dell'anima sono *le stesse per tutti* gli esseri umani, le espressioni linguistiche che convenzionalmente designano le affezioni dell'anima, non lo sono. Così, mentre vi è una relazione convenzionale, arbitraria, tra le espressioni linguistiche e le affezioni dell'anima, tra queste ultime e le cose vi è una relazione motivata, iconica, basata su una somiglianza "naturale". Le cose si conoscono attraverso le affezioni dell'anima, senza che vi sia una connessione diretta tra le cose e le espressioni linguistiche che ad esse rinviano. In altre parole, le espressioni linguistiche sono simboli non delle cose, ma delle affezioni dell'anima connesse a tali cose.

Che cosa sono precisamente queste affezioni dell'anima, la cui condivisione è posta a garanzia del nostro vicendevole comprenderci? L'espressione aristotelica è *pathémata tes psychés*.

Ora, *Páthema* viene dal verbo *pascho*, subire, una delle categorie aristoteliche, contrapposto a *ago*, agire. Siamo di fronte, dunque, a schemi concettuali ricevuti dall'intelletto, che li subisce passivamente; in questo essi sono, pertanto, *oggettivi*, e quindi, *a fortiori*, *intersoggettivi*. Essi poi, a loro volta, stanno-per le cose, le stesse per tutti. La struttura esplicativa del problema del significato è pertanto questa, che le affezioni dell'anima, cioè gli oggetti mentali (concetti, pensieri o entità mentali), sono immagini di cose, e noi esprimiamo gli oggetti mentali attraverso segni linguistici, che non sono gli stessi per tutti, prova ne sia la moltitudine delle lingue. Ma la condivisione degli oggetti mentali (si noti che Aristotele usa, per anima, *psichés*, che potrebbe essere tradotto altrettanto bene con 'mente') consente infine la condivisione dei significati.

Come si ripresenta allora il nostro paradosso? La situazione, pur in assenza dell'ipotesi del sopramondo, non si presenta molto diversa da quella di Platone: il maestro porge segni che, per lui, maestro, sono simboli di oggetti mentali, mentre per il discente sono soltanto macchie d'inchiostro o suoni della voce, almeno in un primo momento, dunque, entità che non designano alcun oggetto mentale. Il discente, ricordiamolo, ha in sé gli stessi oggetti mentali del maestro, poiché *sono gli stessi per tutti*, e, per capire, deve riuscire a determinare, entro sé stesso, quale precisamente tra essi è immagine delle, o simile alle cose (fatti, azioni, pratiche operative etc.) che il maestro gli esibisce.

In altre parole, per il discente D, un'espressione linguistica L significa direttamente l'oggetto mentale O se e solo se O è l'oggetto mentale al quale l'espressione L è convenzionalmente legata; L, inoltre, significa indirettamente la cosa C se e solo se C rinvia all'oggetto mentale O (quello al quale l'espressione L è convenzionalmente legata) grazie a qualche relazione di somiglianza tra O e C (per una trattazione più ampia e articolata, dal punto di vista filosofico, si rimanda a Charles, 2000).

Dunque, per Aristotele, solo le espressioni linguistiche, le parole lette o sentite, permettono di ricordare ciò che già conosciamo (affezioni dell'anima). Così, solo l'ascolto, la lettura, le parole

conosciute e ricordate, oltre all'esperienza acquisita, permettono al discente di riconoscere ciò che ha parvenza di macchia scritta, o suono della voce, come simbolo di un oggetto mentale che lui, discente, già possiede. Occorre, dunque, da parte dell'allievo, il riconoscimento di una relazione convenzionale tra l'espressione linguistica che è transitata dal maestro a lui, in quanto trasmissibile, e l'oggetto mentale, non trasmesso né trasmissibile, ma preesistente nella sua mente. Ciò che viaggia, ciò che appare, nel mondo è l'espressione come oggettivazione del pensiero; ai due estremi del viaggio troviamo i due oggetti mentali, quello del maestro e quello dell'allievo, che sono assunti a priori come identici. L'apprendimento consiste allora nella scoperta da parte dell'allievo di tale identità, attraverso l'uso di espressioni che costituiscono loro rappresentazioni semiotiche.

L'apprendimento deve comunque partire da cose familiari o già conosciute, da cose osservate, oppure da espressioni linguistiche già riconosciute come rappresentazioni di oggetti mentali; in altre parole, il discente deve conoscere già qualcosa di ciò che si appresta ad imparare. Per Aristotele, come afferma Olav Eikeland (2008): «Tutti i discenti hanno bisogno di una forma di "conoscenza tacita" e di esperienza da cui partire. Una qualche forma di percezione o di comprensione è un prerequisito ed è presupposta». Per Aristotele, il nostro paradosso si risolve dunque presupponendo l'esistenza di oggetti mentali, gli stessi per tutti, ai quali si può accedere direttamente attraverso le espressioni linguistiche che convenzionalmente li designano, ma che occorre prima acquisire mediante l'ascolto o la lettura, oltre che attraverso l'esperienza.

3.3. La semantica stoica: Zenone di Cizio (330 – 232), Cleante di Asso (330 – 232), Crisippo di Soli (280 – 208)

Non molto dopo la morte di Aristotele, ma su presupposti teoretici affatto diversi, nasce una teoria semantica altrettanto importante, destinata ad avere enorme influenza nel seguito: lo stoicismo; essa diverrà la filosofia greca più consona alla mentalità fortemente pratica dei Romani, permeando di sé la filosofia latina dell'età

classica, cioè dal I secolo fino ai primi secoli dell'impero. Tuttavia la cultura latina privilegia gli aspetti pratici, per cui lo stoicismo viene a consolidarsi prevalentemente nei suoi aspetti morali, vale a dire sul piano dell'etica, mentre poco si diffonde la parte teoretica, fatto di cui ancora oggi si avvertono le conseguenze: la parte teoretica rimane ancora poco conosciuta, al di fuori della stretta cerchia degli addetti ai lavori. Per lo stoicismo la filosofia si articola nei tre grandi campi della *logica*, della *fisica* (l'accezione di questo termine, in greco, è diversa dalla nostra attuale; poiché *physis* significa 'natura', potremmo interpretare 'fisica' come scienza della natura in generale) e dell'*etica*.

Quanto a noi serve, e non possiamo non limitarci ad esso, è la teoria del significato, ovvero la definizione del così detto 'triangolo stoico', o triangolo semantico, appunto, che caratterizza ogni espressione linguistica. Gli Stoici, come già Aristotele, si rendono perfettamente conto che il rapporto linguaggio/mondo necessita di almeno un altro elemento per spiegare il concetto di 'significato'. In altri termini, si deve partire dalla constatazione che il significato, o *denotatum*, non è direttamente la cosa del mondo. Quando io parlo col barbaro, che non capisce la mia lingua, e gli dico «Vedi Dione che cammina», il barbaro non mi capisce. Eppure egli percepisce le mie parole, perché non è sordo; e, altrettanto bene, percepisce la cosa, perché, non essendo cieco, vede a sua volta Dione che cammina dinnanzi a noi. E tuttavia egli non mi comprende. Che cosa gli manca? Per rispondere a questa domanda occorre, prima di tutto, prendere in esame il triangolo semantico. Tre sono gli elementi che entrano in gioco in una espressione linguistica e che costituiscono, appunto, il triangolo semantico: il *significante* (*semainon*) cioè l'aspetto fonetico ovvero l'espressione (parola o frase) pronunciata, il *significato* (*semainómenon*) cioè il contenuto associato all'espressione, e il *referente* (*tynchánon*) cioè la cosa o realtà concreta a cui l'espressione si riferisce (oggetto materiale o evento). Gli Stoici ci avvertono che, dei tre termini, due sono corporei, il significante e il referente, mentre l'altro, il significato, no. Il significato non è né una affezione dell'anima in senso

aristotelico, né un'idea in senso platonico; non è un pensiero o qualcosa di puramente psicologico (perché altrimenti sarebbe corporeo),¹ così come non è un'entità invariante tra comunità linguistiche o tra culture; in quanto incorporeo, il significato è uno stato di cose, un modo di essere o di guardare alle cose, una unità culturale (per approfondire si veda: Eco, 1984). Il significato (*semainómenon*) viene allora ad assumere la funzione di medio tra significante (*semainon*) e referente (*tynchánon*), ed è condizione ineliminabile della comunicazione e della comprensione.

Come evidenzia Umberto Eco (1986), Sesto Empirico (II sec.) (*Adversus mathematicos*, 8, 11) identifica il *semainómenon* (significato) con il *lektón*, che è un *asómaton* (incorporeo), ma la relazione appare invece più articolata.

Tradurre *lektón* in una lingua moderna è impresa non facile; c'è chi lo identifica con un termine tecnico, c'è chi afferma che '*lektón*' non era originariamente un termine tecnico perché indicava la caratteristica principale delle cose (*pragmata*) di essere usate nei discorsi e di significare i suoni emessi (Versteegh, 1977).

Seneca (4 – 65), proprio in riferimento all'esempio sopra fatto, scelto non a caso, cerca di renderlo in latino con *dictum*, o *effatum*. Se *lexis* è espressione, *lektón* ne è l'analogo in forma passiva, quanto espresso, quanto denotato. Ma, tra i *lektá*, gli Stoici distinguono, più in particolare, quelli completi da quelli incompleti. Il *lektón* è detto *completo* se trasmette un'informazione della quale si può inequivocabilmente dire se è vera o falsa. Il *lektón* è detto invece *incompleto* se esprime qualcosa che deve essere integrato con qualcos'altro per trasmettere un'informazione che possa essere giudicata vera o falsa. Per esempio, un predicato senza soggetto («cammina») esprime un *lektón* incompleto, mentre una proposizione («Dione cammina») esprime un *lektón* completo. I *lektá* incompleti sono cioè parti di una proposizione (soggetto e predicato, nel nostro esempio), intese non come entità grammaticali

¹ Nella fisica stoica, ricordiamolo, quasi tutto costituisce un'entità materiale, pure Dio, l'anima e il pensiero.

ma come contenuti espressi o esprimibili, virtuali, cioè considerati indipendentemente dalla loro relazione con un dato significante. Un *lektón* completo, in combinazione con un significante, costituisce una proposizione che asserisce qualcosa passibile di essere giudicata vera o falsa.

Il barbaro, dunque, percepisce sia la voce emessa sia l'evento fisico (un uomo, Dione, che cammina), ma non riconosce la prima come espressione che rinvia al secondo, cioè come elemento portatore di senso, non conoscendo la regola (o il codice) che permette di collegare la voce emessa all'evento fisico (come il fumo al fuoco, in qualche caso), dunque quanto espresso o esprimibile, ovvero il *lektón*; non essendo quest'ultimo invariante rispetto alle culture.

Ed è precisamente questo che manca al barbaro per la comprensione. Il ruolo del *lektón* è fondamentale, perché è proprio così che si determina il rapporto funzionale tra espressione e cosa, rapporto virtuale, non diretto ma, appunto, mediato.

Torniamo ora al nostro problema, entro questo ulteriore panorama esplicativo. Il discente percepisce attraverso i sensi la voce emessa dal maestro, l'oggetto materiale o la cosa che il maestro esibisce (una rappresentazione di un oggetto matematico, per il maestro). Il processo di conoscenza, per gli Stoici, ha origine proprio da qui, dalla percezione attraverso i sensi. Quest'ultima, non appena se ne acquisisce consapevolezza, diventa *rappresentazione* (*phantasia*, impressione sull'anima). Una rappresentazione è come l'impressione di un sigillo nella cera; è l'oggetto stesso a produrla nel discente; durante la sua formazione, l'anima rimane passiva; ed è attraverso la rappresentazione che l'oggetto corrispondente si mostra al discente. Dopo che l'oggetto è stato rimosso, permane nel discente la memoria dell'oggetto. Un grande numero di memorie di questo tipo costituisce ciò che gli Stoici chiamano *esperienza* (*empeiria*). I concetti si formano in una fase successiva, a partire dalle rappresentazioni, e si formano spontaneamente (quando rappresentazioni simili si fondono in nozioni universali, senza una piena consapevolezza da parte del discente) oppure consapevolmente (attraverso un'attività riflessiva che permetta al

discente di individuare somiglianze e analogie tra le rappresentazioni, e di combinarle in concetti o conoscenze). Secondo Cicerone (106 – 43) (*Academica*, II, 47), Zenone paragonava la percezione a una mano aperta, l'assenso a una mano semichiusa, la comprensione (*katalêpsis*) alla mano completamente chiusa (il pugno), e la conoscenza (*scientia*) al pugno serrato con forza dall'altra mano. La conoscenza, secondo questa visione, è cioè *katalêpsis* perfetta (per una trattazione più ampia e generale si rimanda a Stöckl, 1887).

Il discente riceve dunque dal maestro il segno materiale (ciò che per il maestro costituisce una rappresentazione dell'oggetto matematico). Dall'altra parte, una volta che esso si è impresso nella sua mente, egli deve ritrovare, sempre nella sua mente, o, come forse direbbero gli Stoici, entro i gangli fisici del suo cervello, proprio la rappresentazione di quell'oggetto matematico che possa essere posta in corrispondenza con quel preciso segno che gli è stato porto, e dunque con l'oggetto matematico al quale il maestro intende, vuole, riferirsi. Solo la determinazione dell'opportuno *lektôn* potrà coronare con successo il processo di apprendimento. In altre parole, il fine, la meta, l'*ubi consistam* dell'apprendimento si sostanzia proprio nella scoperta della relazione tra R(O) ed O.

4. Agostino di Ippona

Agostino di Tagaste o di Ippona (354 – 430), a seconda che si scelga il luogo di nascita o di morte, è indubbiamente uno dei personaggi più interessanti e fulgidi dell'inizio del Medioevo. Ben noto come teologo, un po' meno come matematico (ma non mancano studi o citazioni in tal senso: Carruccio, 1964; D'Amore, Matteuzzi, 1976; Bagni, 2012), è da tempo citato negli studi sulla semiotica (basiamo le considerazioni del presente paragrafo su D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013).

Fu lui a unificare due precedenti e contrapposte teorie, quella del linguaggio e quella del segno. Il segno è un dato sensoriale: «qualcosa che, al di là del suo aspetto sensibile, fa venire in mente qualcosa di diverso da sé, come l'orma lasciata dall'animale, il fumo da cui si inferisce la presenza del fuoco, il lamento che indica dolore, o la tromba che comunica ordini ai soldati» (Agostino, *De doctrina cristiana*, II, 1.1); ma esso, per la mente che lo percepisce, indica sempre qualche cosa. Ci sono dunque un veicolo del segno (qualcosa) ed un referente (qualcos'altro); l'interprete, talvolta non menzionato, è presupposto in qualsiasi modello del segno; non costituisce dunque un ulteriore, terzo, elemento della relazione segnica, nella tradizione che distingue sistematicamente senso e referente, come hanno ipotizzato gli Stoici (Nöth, 1995). Agostino fornisce anche la seguente definizione di segno: «Si definiscono genericamente segni tutte le cose che significano qualcosa, e tra queste si trovano anche le parole» (Agostino, *De magistro*, I, 4.9); l'inclusione delle parole fra i segni è una novità e bisogna cercare altrove una definizione: «(parola è) un segno di qualcosa che può essere compreso da chi ascolta quando è pronunciato da chi parla» (Agostino, *De dialectica*). In questo stesso testo, Agostino distingue quattro componenti della parola: (1) il *verbum*, la parola detta, il significante; (2) la *dictio*, ovvero la parola detta da qualcuno per significare qualcosa, dunque una combinazione di significante e significato; (3) il *dicibile*, ciò che della parola si capisce ed è contenuto nella mente; (4) la *res (cosa)*, ciò a cui la parola si riferisce e che può essere percepito attraverso i sensi o l'intelletto, oppure che non è accessibile ai sensi.

A suo avviso, non si passa dal segno al significato, ma da un segno ad un altro segno, dato che un segno non può, per sua natura, rendere evidente un significato. Ancor più ciò vale nella relazione fra segno e oggetto: occorre conoscere l'oggetto O per poter riconoscere che quel dato segno S è segno di un dato oggetto S(O).

La conoscenza di O permette di riconoscere S come S(O), ma S, da solo, senza la preventiva conoscenza di O, non permette di capire che S è segno di O.

Ciò comporta di conseguenza una scala d'importanza nell'apprendimento: prima si apprendono le cose e solo dopo i segni delle cose.

«Quando infatti mi è dato un segno, se mi trova nella non conoscenza della cosa di cui è segno, non mi può insegnare nulla, ma se la so già, allora che cosa imparo mediante il segno?» (*De magistro*, 10, 115).

Il segno può indicarci dove dobbiamo guardare per vedere (funzione deittica o ostensiva) e quindi per imparare (funzione cognitiva), oppure può avere una funzione evocativa, cioè richiamare alla mente un concetto, un significato, o un'immagine (*De magistro*, 10, 168); esso ha dunque in origine come primaria una funzione ostensiva. Il segno è dunque utilizzato in funzione dell'oggetto.

Riportiamo di seguito un lungo brano del *De Magistro*, che contiene il passo sopra riportato.

«10. 33. Ma a considerare più attentamente, forse non troverai oggetto che sia appreso mediante propri segni. Quando mi si mostra un segno, se io non so di quale oggetto è segno, è assurdo che m'insegni qualche cosa. Se poi lo so, cosa apprendo dal segno? La parola non mi mostra la cosa che significa, quando leggo: *E le loro sarabare non sono state bruciate*. Se con tale nome sono chiamati determinati copricapo, nell'udirlo, ho forse appreso che cos'è capo e che cosa lo copre? Li conoscevo già e non ne ho avuto conoscenza perché li ho intesi nominare da altri, ma perché li ho visti. Infatti quando per la prima volta le due sillabe del termine "capo" hanno colpito il mio udito, non ne ho conosciuto il significato ed egualmente quando per la prima volta ho udito o letto le sarabare. Ma "capo" è una parola molto usata. Ed io, avvertendola con intenzione, ho saputo che è il vocabolo di una cosa che mi era assai nota per averla vista. Prima di accorgermene, la parola per me era soltanto un suono; ho imparato che è anche un

segno quando ho trovato di quale oggetto è segno. Ma, come ho detto, avevo appreso la cosa non mediante l'uso dei segni, bensì con la vista. Dunque si apprende il segno con la cosa conosciuta piuttosto che la cosa col segno.

10. 34. Per comprendere meglio l'argomento, supponi che ora, per la prima volta, noi udiamo il termine "capo". Non sapendo se la voce sia soltanto un suono o abbia anche un significato, domandiamo che cos'è capo. Ricorda che non desideriamo conoscere la cosa significata, ma il segno e che non lo conosciamo perché non sappiamo di che cosa è segno. Se dunque alla nostra domanda ci si mostra col dito la cosa stessa, appena la vediamo, apprendiamo il segno che avevamo soltanto udito e non ancora conosciuto. E poiché in questo segno ci si offrono due aspetti, il suono e il significato, noi non abbiamo colto il suono mediante il segno ma mediante lo stimolo uditivo, il significato mediante la percezione della cosa significata. L'indicare col dito appunto non può significare altro oggetto che quello, cui il dito si tende; ed esso è teso non al segno, ma verso quella parte del corpo che si chiama capo. Da quel gesto dunque non posso conoscere la cosa perché la conoscevo, né il segno a cui non era teso il dito. Ma non voglio preoccuparmi troppo della indicazione col dito perché mi sembra un segno della stessa indicazione anziché di cose che ne possono essere indicate. (...) Ed ora mi accingo a convincerti, se riuscirò, soprattutto che non si apprende mediante i segni, che sono detti parole. Piuttosto, come ho detto, si apprende la funzione della parola, cioè l'atto del significare nascosto dal suono, con la conoscenza dell'oggetto significato anziché l'oggetto con l'atto del significare».

Riteniamo che Agostino costituisca un illustre precedente assai esplicito per il nostro 'paradosso cognitivo', sul quale doverosamente riflettere.

5. Gottfried Wilhelm Leibniz

Dell'immensa produzione di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), il cui lascito consta di oltre 150.000 pagine, vogliamo qui considerare un brevissimo saggio, tutto dedicato al problema semantico. Si tratta di *Dialogus*, edito per la prima volta da Erdmann nel 1840.² Leibniz immagina un dialogo tra due personaggi, che chiama semplicemente A e B, il primo dei quali fa da conduttore, ed esprime le idee di Leibniz stesso. Si parte dalla considerazione di una semplice verità geometrica. A chiede allora a B: *Hocine verum esse putas, etiamsi a te non cogitetur*, Tu ritieni che questo sia vero anche se non viene pensato da te? E B risponde: *Imo, antequam vel Geometrae id demonstrassent, vel homines observassent*, Ma certo, questo era vero prima ancora che i Geometri lo dimostrassero, o gli uomini l'avessero osservato.

Ecco un punto notevole. Qui si assume che le verità matematiche tali siano *ab aeterno*, e non dipendano dalla produzione umana. Potremmo definire questa posizione realista, o anche platonista, in antitesi con le posizioni *costruttiviste*, ossia con chi invece ritiene che l'oggetto matematico sia il prodotto della mente del matematico [si pensi, ad esempio, all'intuizionismo di Luitzen Brouwer (1881 – 1966) o di Arend Heyting (1898 – 1980)].³ L'affascinante questione dell'esistenza in matematica, che non possiamo certo affrontare qui, è tuttavia un presupposto con cui è necessario fare i conti per capire

² Leibniz G.W. (1849). *Opera philosophica*. Ed. J.E. Erdmann. Berlino. Pp. 76-78. Erdmann lo intitola: *Dialogus de connexione inter res et verba, et veritatis realitate*, mentre Leibniz stesso l'aveva intitolato semplicemente *Dialogus*; Leibniz ci fornisce anche una datazione certa, annotando sotto il titolo: "August, 1677". L'opera fu poi riedita da Gerhardt, che la colloca negli scritti di *Scientia Generalis. Chatacteristica*, vol. vii dei *Philosophische Schriften*, pp. 190-193. Una traduzione italiana si può trovare in Barone F. (1968). *Leibniz, Scritti di logica*. Bologna: Zanichelli. Pp. 172-177.

³ Attualmente, dopo il secondo Wittgenstein, si tende di più a distinguere tra posizioni realiste, appunto, e pragmatiste (D'Amore, 2001; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; e altrove).

fino in fondo, e inquadrare opportunamente, il nostro paradosso. Aderire alla prima o alla seconda delle ipotesi ha conseguenze tutt'altro che irrilevanti: un conto è presupporre che O , l'oggetto matematico, in ogni caso esista di per sé, un altro assumere che O vada *costruito*, debba cioè essere portato all'esistenza dall'allievo nel suo stesso percorso cognitivo. Non è detto che, a prendere le mosse da $R(O)$, che è tutto ciò che riceve, l'allievo sia sempre in grado di costruire cognitivamente quell' O la cui esistenza cognitiva, dunque, non è affatto garantita (e su questa mancanza di garanzia, la ricerca internazionale ha prodotto tanto, negli ultimi 20 anni).

Leibniz prosegue mettendo in imbarazzo il suo interlocutore che, considerando vero anche ciò che non è stato pensato, è condotto a collocare la verità, e quindi il significato, *nelle* cose. Dal che segue la contraddizione che dovrebbero esserci anche delle cose false, posto che non tutto quello che diciamo è vero. È questa la classica aporia in cui si cade a ridurre il significato alla cosa. Leibniz guadagna da qui l'attribuzione della verità alle proposizioni in quanto possibili, così che, a seconda che qualcuno pensi in questo o in quel modo, il suo pensiero sarà vero o falso: «Vides ergo veritatem esse propositionum seu cogitationum, sed possibilium, ita ut illud saltem certum sit, si quis hoc aut contrario modo cogitet, cogitationem eius veram aut falsam fore». Il passo successivo è la confutazione del nominalismo, o comunque delle teorie convenzionalistiche del linguaggio: il criterio di verità si fonda sul reale.

Contro la famosa obiezione anonima, che Leibniz immagina essere stata avanzata da Thomas Hobbes (1588 – 1679), che il linguaggio è basato su convenzioni, e che la scelta delle parole è arbitraria, Leibniz ha buon gioco a notare che, malgrado la differenza dei segni usati, «è identica la geometria dei Greci, dei Latini e dei Tedeschi». Si deve notare che i pensieri possono prodursi senza vocaboli, ma non senza altri segni. Leibniz sfida il suo interlocutore: «Tenta quaeso an ullum Arithmeticum calculum instituere possis sine signis numeralibus», Prova, se ti riesce, a fare

qualche calcolo aritmetico senza segni numerali!⁴

La tesi finale cui il nostro approda è che il segno (o *carattere*), pur se non deve necessariamente 'somigliare' alla cosa, presenta rispetto alla cosa, al reale, o rispetto al concetto che esso designa un isomorfismo strutturale (una iconicità diagrammatica, in termini peirceani) che non dipende dalle convenzioni o dalla scelta dei segni. Così i matematici possono giungere a risultati invarianti, pur usando sistemi posizionali diversi, per esempio in base decimale o in base duodecimale, «a meno che gli enunciati riguardino i caratteri stessi». E il saggio termina proprio con un esempio matematico. Consideriamo a^2 . Possiamo assumere che a sia uguale a $b + c$, e allora avremo che a^2 vale $b^2 + c^2 + 2bc$, oppure che a sia uguale a $d - e$, e allora avremo che il quadrato è $d^2 + e^2 - 2de$. È facile per Leibniz mostrare, con alcune uguaglianze, come l'oggetto matematico, pur rappresentato con segni diversi, sia in definitiva lo stesso.

Questa è dunque la via per uscire dal paradosso, secondo Leibniz: cogliere l'invarianza delle proprietà dell'oggetto matematico rispetto all'arbitrarietà dei segni utilizzati (che ritroviamo nello stesso Duval). Il punto è allora quello di passare da una rappresentazione privata, soggettiva, che si colloca, per Leibniz, nella mente del soggetto, ad una rappresentazione "oggettiva" o, quanto meno, "intersoggettiva". Questo passaggio verrà meglio esplicitato da Frege, come vedremo di seguito, ma fa parte delle conquiste della didattica attuale e non solo della ricerca (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013).

⁴ A margine Leibniz annota la celebre frase, che il logico francese Louis Couturat (1868 – 1914) sceglierà a *esergon*: Cum Deus calculat (...) fit mundus.

6. Gottlob Frege

Della vasta produzione di Gottlob Frege (1848 – 1925) conviene qui fare perno sul saggio *Über Sinn und Bedeutung*, che potremmo tradurre *Senso e significato*, anche se non mancano alternative spesso fantasiose.⁵ Si tratta dello scritto che probabilmente ha più di tutti influenzato le teorie del significato moderne e contemporanee. La distinzione fondamentale su cui Frege basa i suoi argomenti è quella tra ‘senso’ e ‘significato’, appunto, cioè tra *intensione* ed *estensione*, o *connotazione* e *denotazione*, distinzione nota fin dai primordi, per esempio certamente già ad Aristotele, ma mai analizzata in modo così sistematico, se si eccettuano vari scritti di Leibniz, tuttavia lasciati inediti.

Prendiamo il termine ‘triangolo’ e il termine ‘trilatero’. Poiché un triangolo non può che essere trilatero, e viceversa, diciamo con Frege che i due termini hanno lo stesso *significato*, ossia denotano lo stesso oggetto. D’altra parte, ‘triangolo’ vuol dire ‘figura che ha tre angoli’, mentre ‘trilatero che ha tre lati. Dunque il *senso* è diverso. Si potrebbe essere tentati di pagare un tributo al rasoio di Occam, ed eliminare il senso: in fondo, quanto meno in sede matematica, ciò che ci interessa pare essere *in primis* il significato. E, di fatto, larga parte delle teorie formali basa la sua semantica sulla estensione, ed espunge, o comunque cerca di espungere, la intensione.

Tuttavia, le cose non sono così semplici. Il concetto di identità canonizzato da Leibniz si basa sulla mutua sostituibilità in tutti i contesti: «Eadem sunt, quae mutui substitui possunt, salva veritate» (Leibniz, *Die Philosophische Schriften*. VII, pag. 219). (Si veda Bagni, 2006). Dunque, se ho dimostrato che $A = B$, posso rimpiazzare l’uno (A) con l’altro (B) a piacimento, senza modificare il valore di verità dell’enunciato. E possiamo aggiungere

⁵ Fu Frege stesso a pronunciarsi per questa soluzione, in una lettera personale (una delle tante) a Giuseppe Peano (1858 – 1932); il che ci pare chiuda la questione.

che a questo tipo di ... ginnastica il matematico è bene abituato, non passa giorno senza praticarla.

Ma torniamo al nostro esempio: avendo convenuto che 'triangolo' e 'trilatero' denotano la stessa cosa, possiamo concludere che ogni predicato che vale per il primo vale anche per il secondo, e viceversa. Consideriamo tuttavia l'enunciato seguente:

1) Con un semplice ragionamento ci si può convincere che ogni triangolo è un trilatero.

Adesso, sulla base del principio su esposto, sostituiamo 'triangolo' a 'trilatero' nella 1). Avremo:

2) Con un semplice ragionamento ci si può convincere che ogni triangolo è un triangolo.

Mentre 1) ci appare un enunciato matematicamente sensato, ancorché semplice, 2) non ci comunica alcuna verità geometrica.

Attenzione dunque: l'identità del *denotatum* di due termini non ne consente la sostituibilità davvero in *tutti* i contesti, ma solo in quelli puramente estensionali, in una accezione che può essere definita rigorosamente.

Il discorso ci porterebbe molto lontano. Ma vogliamo invece tornare al nostro paradosso; e porci quindi la domanda: quando il maestro porge l'espressione linguistica, lo studente che cosa riceve, il senso o il significato di quella che Duval chiama 'rappresentazione semiotica'? O, magari parzialmente, entrambi? È sensato pensare che si diano di volta in volta tutti i casi possibili.

Facciamo un esempio. Voglio insegnare un teorema di geometria piana. Dico all'allievo di considerare il triangolo ABC, e di rappresentarlo in figura. Che cosa ho comunicato? Qui si capisce che prevale il *Sinn*, il senso: il ragazzo recepisce la caratteristica intrinseca qualificante dell'oggetto, che è quella di avere tre angoli, caratteristica che basta a determinare l'appartenenza dell'oggetto a una precisa classe e a nessun'altra. Poi gli dico di prolungare la base BC. La sua attenzione cadrà immediatamente sull'oggetto, la cui icona ha sotto gli occhi: qui prevale la *Bedeutung*, il *denotatum*. Le proprietà dell'oggetto, l'essere un segmento, il potere essere pensato come un insieme più che numerabile di punti, il fatto di

essere assunto come lunghezza senza larghezza etc. passano in secondo piano. Non che l'oggetto non possieda queste proprietà, né che lo studente le ignori: semplicemente, escono dal campo della rappresentazione semiotica. Esse andranno caso mai recuperate, nel seguito, ove richiesto dalla prosecuzione della dimostrazione o in altre successive occasioni. D'altra parte, proprio gli studi pionieristici di Duval ci hanno insegnato a distinguere in ciascuna rappresentazione semiotica $R_i(O)$ di un oggetto matematico O le caratteristiche di O che $R_i(O)$ riesce a rappresentare a differenza di altre $R_j(O)$, $i \neq j$ (D'Amore, 2000).

Frege assimila il senso alla rappresentazione, il significato all'oggetto. Tuttavia egli distingue tra la rappresentazione mentale e privata, quella che ciascuno ha nella propria mente, da una rappresentazione intersoggettiva. Nel primo caso avremo tutte rappresentazioni diverse l'una dall'altra, nel secondo caso ne avremo una sola. Il celeberrimo esempio che fa Frege è illuminante. Parliamo della Luna. Di fronte all'espressione 'Luna', ognuno di noi si forma una rappresentazione, e non ce ne sono due uguali. Chi la pensa grande, chi piccola, chi vicina da intravederne i crateri e le asperità, chi lontana, e quindi uniforme e splendente; chi la immagina piena e chi all'ultimo quarto etc. E quand'anche convenissimo di parlare della 'Luna piena', 'vicina' etc., ugualmente ciascuno di noi si formerebbe un'immagine diversa. Ora prendiamo un telescopio, e puntiamolo sulla Luna. Quell'immagine che è proiettata dalla lente dell'obiettivo all'interno del cannocchiale è il *sensu* che ci serve per comunicare: essa è oggettivamente uguale per tutti gli osservatori. Certo, l'immagine retinica poi sarà di nuovo privata, soggettiva. Tuttavia quella rappresentazione che sta dentro al cannocchiale può essere usata, captata, condivisa da più persone. In conclusione abbiamo la Luna, che è l'oggetto, pertanto il *denotatum* del nome, e all'estremo opposto la nostra rappresentazione soggettiva. In mezzo sta il senso che, per dirla con le parole di Frege, «naturalmente non è più soggettivo come la rappresentazione ma non è neppure l'oggetto stesso». Ecco qui una conferma del paradosso che ci interessa. Ed

ecco, di nuovo, come, da quei brandelli di senso e di significato che il maestro porge, ricompresi entro la rappresentazione semiotica, l'allievo è chiamato a costruirsi l'oggetto che chiaramente non può altrimenti essere veicolato. Paradosso nel paradosso.

7. Edmund Husserl

La soluzione semantica proposta da Edmund Husserl (1859 – 1938), in specie nei *Prolegomeni* e nella *Prima ricerca logica, Espressione e significato*, risulta più articolata e più sofisticata di quelle che abbiamo visto finora.

«Ogni segno è un segno di qualcosa, ma non ogni segno ha un 'significato', un 'senso' che il segno esprime» (Husserl, 1900-01). Inizia così la sua analisi del linguaggio, dall'affermazione che alcuni segni, oltre ad indicare qualcosa, esprimono un significato (tali sono, in particolare, tutte le espressioni linguistiche), mentre altri segni (note, marchi etc.) indicano qualcosa senza esprimere un significato. I primi li chiama *espressioni*, mentre i secondi *indici* (o *indicazioni*).

Un segno di tipo 'espressione' è dunque associato a un modello triadico: *espressione* (il veicolo del segno), *significato* (il senso) e *cosa* (il referente). Un segno di tipo 'indice' è invece associato a un modello diadico: *indice* (il veicolo del segno) e *cosa* (il referente).

Così, mentre un'espressione ha un significato ed indica qualcosa attraverso il suo significato, un indice indica qualcosa senza avere di per sé un significato. La relazione con il referente, in quest'ultimo caso, è diretta e di tipo psicologico, nel senso che la convinzione dell'esistenza di una cosa motiva la convinzione di un'altra; la relazione tra un'espressione e il suo referente, invece, è mediata dal significato e non è una questione di convinzione (per approfondire si veda Mensch, 2001).

Nel caso dell'espressione, Husserl distingue in particolare tre ingredienti della significazione (Nöth, 1995): (1) un "atto

conferitore di significato” o “intenzione significante”, da parte del produttore dell’espressione, al quale corrisponde un “atto di riempimento di significato” da parte dell’interprete; (2) il *contenuto* o significato di questi atti; (3) l’*oggetto* significato dall’espressione. Il significato è in ogni caso un’entità ideale, al di fuori della mente umana, ma associata alla coscienza umana attraverso l’atto intenzionale di significazione. Soltanto l’atto intenzionale della coscienza conferisce significato al segno (Nöth, 1995). Dunque, mentre l’espressione presuppone sempre un atto intenzionale di significazione, l’indice no; tuttavia, nel caso dell’indice, “noi di solito sentiamo la connessione” del veicolo del segno con l’oggetto simultaneamente presente (Husserl, 1900-01).

È possibile che in tutto questo egli sconti l’influenza dei suoi studi matematici: Husserl studiò sotto Carl Weierstrass (1815 – 1897), assieme, notiamo *en passant*, nientemeno che a Georg Cantor (1845 – 1918) (e conobbe bene l’opera dell’amico e collega sulla teoria degli insiemi transfiniti).

Se io scrivo a_i ed a_j , che funzione espressiva hanno i e j ? Da un lato essi non ci dicono niente degli ‘ a ’ a cui sono relativi; dall’altro, tuttavia, essi hanno carattere individuante. Intanto ci dicono che il secondo oggetto è diverso dal primo. Ma poi, se nel seguito torniamo ad usare a_j si capisce che non è più un qualsiasi a purché diverso da a_i ma è anche lo stesso a_j di prima. La conclusione è dunque che il riferimento all’oggetto esiste, ovvero siamo di fronte a una denotazione. D’altra parte il carattere descrittivo è nullo: Frege direbbe che manca il *Sinn*. Il processo espressivo parte dall’*Intenzionalität*, dall’intenzionare un oggetto da parte del parlante. Questo è uno dei capisaldi della fenomenologia husserliana: il pensiero è *direzionale*, può *puntare* sull’oggetto che vuole. A questo punto lo può indicare od esprimere o entrambe le cose. Compie cioè un ‘atto significante’. Qui è rilevante che, oltre che il contenuto linguistico in sé, viene fornita una ulteriore informazione, che consiste nell’intenzione di comunicare.

L'originalità dell'approccio di Husserl rispetto a tutte le situazioni precedenti verrà colta soprattutto da Karl Bühler (1879 – 1963) con la così detta *Kundgabe Theorie der Sprache*, o teoria del riempimento: semplificando i passaggi, potremmo sinteticamente dire che l'ascoltatore, o ricevente, di fronte all'atto significante, cerca in sé stesso un possibile "contenuto riempiente", ossia una rappresentazione che possa colmare la forma che si è data nell'atto comunicativo in sé. Di fatto, qui abbiamo una visione semantica che non si limita a mettersi dalla parte del parlante, o a postulare una pretesa improbabile simmetria tra i due attori, ma si pone altresì nel polo opposto dell'ascoltatore, ossia, nel nostro caso, dell'allievo. E 'dove' cerca il ricevente? Nella sua *Erlebnis*, ovvero nel suo vissuto, nella sua esperienza, nel suo cognitivo (non solo nella 'zona effettiva' di Vygotskij, ma anche nella 'zona prossimale'). Che non è detto che contempi ancora l'oggetto tema del discorso del parlante. Il modello si complica, come dicevamo, ma proprio per questo offre una spiegazione più profonda.

Di nuovo, tornando al nostro paradosso, si ritrova in forma più articolata lo stesso processo agostiniano: «Noli foras ire, in te ipsum rede», Non andare fuori, entra in te. Ricevuto l'atto linguistico, è nella mia *Erlebnis*, o nella combinazione di costituenti che attingo da essa, che posso costruire l'oggetto, riconoscere l'atto linguistico come rappresentazione semiotica dell'oggetto, ossia trovare il "riempimento" adeguato perché il senso⁶ sia conferito, e il processo giunga al successo.

⁶ Usiamo qui 'senso' nell'accezione di Husserl, assai diversa da quella di Frege.

8. Luis Radford

Chiuderemo la rapida rassegna con il seguente paragrafo dedicato al più famoso ricercatore contemporaneo in questo campo, Luis Radford (premio Hans Freudenthal 2011 dell'ICMI).

Ecco quanto scrive Radford nel 2005: «Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere alla conoscenza di questi oggetti generali, dal momento che non abbiamo accesso a questi oggetti se non attraverso rappresentazioni che ci facciamo di essi?» (Radford, 2005).

Fuor di dubbio, la rappresentazione degli oggetti in matematica privilegia l'uso di segni specifici; ma i segni sono artefatti, oggetti a loro volta 'linguistici' (in senso lato), termini che hanno lo scopo di rappresentare per indicare: «Quali sono i mezzi per mostrare l'oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione» (Radford, 2005).

Un altro contributo a conoscere sempre meglio il paradosso cognitivo (qui più specifico per la matematica).

9. Conclusione

La teoria e la pratica si fondono in una mirabile visione unica e molteplice, quando s'ispirano l'una all'altra. Collaborano, l'una per porre problemi all'altra, l'altra per chiedere sistemazioni e definizioni che non possono dipendere da tutta la gamma disponibile di casi possibili.

Siamo stati fortemente colpiti dal racconto di una collega insegnante di scuola dell'infanzia che, avendo presentato ai suoi allievi un oggetto di legno colorato di rosso a forma di cubo, denominandolo 'cubo' (dunque: una presentazione ostensiva e linguistica, una rappresentazione ausiliaria e semiotica), si sia

trovata di fronte a risolini dei bambini che ritenevano volesse prenderli in giro quando, il giorno dopo, ha mostrato un *altro* oggetto di metallo grigio luccicante di volume maggiore sempre a forma di cubo, chiamandolo ancora 'cubo'.

Per i bambini, *cubo* era la denominazione di quell'oggetto 'di ieri', rosso, di legno.

Come 'ripulire' un significato da tutte le componenti indicali fuorvianti che ogni oggetto della realtà concreta porta con sé? Di che sapore è una piramide, che odore ha una retta, pesa di più un angolo o un numero primo? Lungi dall'essere battute leggere, queste sono imbarazzanti domande pesanti.

Sappiamo che l'equivalenza semantica o quella semiotica sono conquiste che, preconizzate da Platone, solo ora si cominciano a capire, ma che costituiscono la base della matematica.

Lo studente indifeso, che ha tutto il diritto di essere *ignorante*, che deve costruire cognitivamente gli oggetti della matematica, non può non confondere l'oggetto con la sua rappresentazione semiotica, non è cattiva volontà, ce lo dicono fior di studi filosofici. Un contributo in più alla conoscenza e, soprattutto, alla costruzione della conoscenza.

Kant sfiora ma non si pone questo problema; il suo essere umano che costruisce conoscenza è un adulto colto che sa e che vuol sapere di più, non esamina il caso di un ragazzo, immerso in una istituzione, che parte da basi assai diverse. Ma noi oggi sappiamo che il bagaglio di conoscenza che ci si costruisce è costituito dall'oggetto che l'insegnante (o l'istituzione) propone e pretende far conoscere e costruire, con tutta la complicazione semiotica che ciò si porta dietro, il linguaggio tipico della disciplina che gioca a rimpiattino fra le teorie e le pratiche.

Una buona dose di riferimenti filosofici che illustrano la problematica, lungi dall'essere sterile esercizio di stile analitico, è invece una solida base per fondare la questione.

D'altra parte, non siamo i primi a porre in relazione quel che si conosce con quel che non si conosce: questo collegamento è possibile solo quando la cosa ignota abbia almeno a che fare con quanto costituisce il conosciuto; è una delle basi della *Doctae Ignorantiae* di Nicola Cusano (1401 – 1464) (presa in prestito da Agostino, in realtà). Nel nostro paradosso, se l'oggetto matematico è ignoto e di esso ci viene presentata una sua rappresentazione semiotica in un dato registro, quel che vediamo, ascoltiamo, tocchiamo, odoriamo, assaggiamo è l'oggetto-rappresentazione, in quanto oggetto materiale, non l'oggetto matematico in sé. Perché, appunto, abbiamo a disposizione altre rappresentazioni semiotiche che costituiscono quel che per Cusano sarebbe quel che ha 'almeno a che fare con quanto costituisce il conosciuto'.

E siccome Husserl ci ha insegnato a valorizzare l'intenzione comunicativa, tutto ciò si lega a certe famose considerazioni di Lev Semënovich Vygotskij (1896 – 1934) per il quale lo sviluppo in generale e quello cognitivo del giovane sono nettamente influenzati dall'ambiente sociale, cioè dalle interazioni tra esseri umani mediate semioticamente (nelle quali è privilegiato il linguaggio) all'interno dell'ambiente con funzioni e risultati assai diversi fra le interazioni adulto – giovane e tra coetanei.

In somma, e per chiudere questa prima carrellata, quel paradosso resta tale perché non può che essere così; perché è esso stesso parte della realtà cognitiva.

Riferimenti bibliografici

Bagni G.T. (2006). Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate. In: Sbaragli S. (Ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica. Vent'anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale. Castel San Pietro Terme (BO), 23 settembre 2006, per festeggiare i 60 anni di Bruno D'Amore. Roma: Carocci Faber. 34-37.

- Bagni G.T. (2012). S. Agostino e la matematica. Ultima lezione di Giorgio T. Bagni nell'Ateneo di Treviso (15 maggio 2009). *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 35 A-B, 3, 217-227.
- Carruccio E. (1964). Il valore ascetico della matematica nel pensiero di S. Agostino. *Studium*. 60, 868-870.
- Charles D. (2000). *Aristotle on Meaning and Essence*. New York: Oxford University Press.
- D'Amore B. (2000). "Concetti" e "oggetti" in Matematica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*. (6) 3, 143-151.
- D'Amore B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30.
- D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Prefazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (Ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno – 6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege. 111-130.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2012). Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano. *Bollettino dei docenti di matematica*. [Bellinzona, Svizzera]. 64, 33-46.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e Luis Radford. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Matteuzzi M. (1976). *Gli interessi matematici*.

- Venezia: Marsilio.
- Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.
- Eco U. (1984). *Semiotica e filosofia del linguaggio*. Torino: Einaudi.
- Eco U. (1986). Sign. In: Sebeok T.A. (Ed.) (1986). *Encyclopedic Dictionary of Semiotics*. Berlin: Mouton de Gruyter.
- Eikeland O. (2008). *The ways of Aristotle: Aristotelian phronêsis, Aristotelian philosophy of dialogue, and action research (Studies in vocational and continuing education)*. Bern: Peter Lang.
- Husserl E. (1900-01). *Logical Investigations*. (Findlay J.N., Trans., 1970). Vol. I. London: Routledge and Kegan Paul.
- Mensch J.R. (2001). *Postfoundational Phenomenology: Husserlian Reflection on Presence and Embodiment*. University Park, PA: Penn State Press.
- Nöth W. (1995). *Handbook of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.
- Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*. 2, 191-213.
- Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22, 1-36.
- Stöckl A. (1887). *Handbook Of The History Of Philosophy. Part One: Pre-Scholastic Philosophy*. (Finlay T.A., Trans.). Dublin: M.H. Gill and Son.
- Versteegh C. H.M. (1977). *Greek Elements in Arabic Linguistic Thinking*. Leiden: E.J. Brill.